第３講　三角・指数・対数関数②

【CHECK & UP】

1　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフをかけ．

(2)　次の(ⅰ)～(ⅲ)の方程式を満たす θ の個数をそれぞれ求めよ．

(ⅰ)　$\cos\theta=1$　　(ⅱ)　$\sin 2\theta=\frac{1}{3}$　　(ⅲ)　$\cos 3\theta=\sin\theta$

2　x についての方程式 $2^x=t$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　$y=2^x$ のグラフをかけ．

(2)　①が $x=0$ を解にもつとき，t の値を求めよ．

(3)　①が正の解をもつときの t の取り得る値の範囲を求めよ．

(4)　①が負の解をもつときの t について，$y=t^x$ のグラフをかけ．

3　x についての方程式 $\log_3 x=t$　……①　について，次の問いに答えよ．

(1)　$y=\log_3 x$ のグラフをかけ．

(2)　①の t が次の値および範囲にあるとき，①の解 x の取り得る値および範囲を求めよ．

(ⅰ)　$t=0$　　(ⅱ)　$t<0$　　(ⅲ)　$t \geqq 1$

(3)　①が $x=2$ を解にもつときの t について，$y=\log_t x$ のグラフをかけ．

(4)　①が $x=30$ を解にもつとき，t の整数部分を求めよ．

4　$\sin\theta=\frac{3}{4}$ のとき，θ について当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　$0<\theta<\frac{\pi}{6}$　　①　$\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{4}$　　②　$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$　　③　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$

5　$2^n-2^m=12$ を満たす自然数 m，n を求めよ．

6　$a=\log_5 2^{1.5}$，$b=\log_5 3^{1.5}$，$c=\log_5 0.5^{1.5}$ のとき，1，a，b，c を小さい順に並べよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3 \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす θ について考えよう．

方程式$(*)$を $\sin\theta$ を用いて表すと

$$\boxed{\text{ア}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{\text{イ}} = 0$$

となる．したがって，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす θ のうち，小さい方を θ_1，大きい方を θ_2 とすると

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \cos\theta_2 = \frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である．

θ_1 について不等式 $\boxed{\text{キ}}$ が成り立つ．$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12}$　① $\frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$

③ $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$　④ $\frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$　⑤ $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

ただし，必要ならば，次の値

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい．

さらに，不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\text{ク}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　[1]　自然数 x で，条件

$$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4 x-10>0 \quad \cdots\cdots①$$

$$x+\log_3 x<14 \quad \cdots\cdots②$$

を満たすものを求めよう．

まず，x を正の実数として，条件①を考える．①は $X=\log_2 x$ とおくと

$$6X^2-\boxed{\text{ア}}X-\boxed{\text{イウ}}>0$$

となる．この2次不等式を解くと　$X<-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}<X$　となる．

したがって，条件①を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ク}}$ であり，$\boxed{\text{ク}}$ 以上のすべての自然数 x は①を満たす．

次に，条件②について考えると，②を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ケコ}}$ であり，$\boxed{\text{ケコ}}$ 以下のすべての自然数 x は②を満たす．

したがって，求める x は $\boxed{\text{ク}}$ 以上 $\boxed{\text{ケコ}}$ 以下の自然数である．

[2]　正の数 x に対して

$$a=\log_3 x-\frac{7}{2},\ b=\log_3 x-\frac{5}{2},\ c=\log_9 x-\frac{5}{2},\ d=\log_9 x-\frac{3}{2}$$

とおく．

(1)　$d=0$ となるような x の値は $x=\boxed{\text{アイ}}$ である．

(2)　$abcd>0$ となるような x の値の範囲を求めよう．

a，b，c，d のすべてが負の場合には　$0<x<\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$　となる．

a，b，c，d のうち2つが正で残り2つが負の場合には

$\boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$　となる．さらに，a，b，c，d のすべてが正の場合には　$\boxed{\text{コサシ}}<x$　となる．

(3)　$\boxed{\text{オカ}}<x<\boxed{\text{キク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ の範囲において，a，b，c，d の間には大小関係

$$\boxed{\text{ス}}<\boxed{\text{セ}}<\boxed{\text{ソ}}<\boxed{\text{タ}}$$

が成り立つ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 x の関数 $\log_2(x^2+\sqrt{2})$ は $x=$ [ア] のとき，最小値 $\dfrac{[イ]}{[ウ]}$ をとる．

a を定数とするとき，x の方程式

$$\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0 \quad \cdots\cdots ①$$

が解をもつ条件は

$a \leqq$ [エ]

である．

$a=$ [エ] のとき方程式①は [オ] 個の解をもつ．

また，方程式①が 3 個の解をもつのは

$a=\dfrac{[カ]}{[キ]}$

のときである．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　三角・指数・対数関数②

[1]　$\frac{\pi}{8}<\theta<\frac{3}{8}\pi$ のとき

$$\tan 4\theta=\frac{1}{2}\tan\theta \quad \cdots\cdots①$$

を満たす θ について考えよう．

一般に，$\tan 2\theta$ を $\tan\theta$ を用いて表すと $\tan 2\theta=\dfrac{\boxed{ア}\tan\theta}{\boxed{イ}-\tan^2\theta}$ である．さらに，

$\tan 4\theta$ を $\tan\theta$ を用いて表すと

$$\tan 4\theta=\frac{-\boxed{ウ}\tan^3\theta+\boxed{エ}\tan\theta}{\tan^4\theta-\boxed{オ}\tan^2\theta+\boxed{カ}} \quad \cdots\cdots②$$

である．①，②から

$$\frac{\tan\theta(\tan^4\theta+\boxed{キ}\tan^2\theta-\boxed{ク})}{\tan^4\theta-\boxed{オ}\tan^2\theta+\boxed{カ}}=0 \quad \cdots\cdots③$$

となる．

θ についての条件により $\tan\theta>0$ であるので，③から

$$\tan\theta=\sqrt{-\boxed{ケ}+\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}$$

を得る．この θ について，不等式 $\boxed{シ}$ が成り立つ．$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ．

⓪　$\frac{\pi}{8}<\theta\leqq\frac{\pi}{6}$　　①　$\frac{\pi}{6}<\theta\leqq\frac{\pi}{4}$　　②　$\frac{\pi}{4}<\theta\leqq\frac{\pi}{3}$　　③　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{3}{8}\pi$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　［1］　方程式

$$6^x - \frac{2^x}{27} - 27\cdot 3^x + 1 = 0$$

を考える．$X=2^x$，$Y=3^x$ とおくと，この方程式の左辺は

$$(X - \boxed{\text{アイ}})\left(Y - \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}\right)$$

と因数分解される．したがって，この方程式の解 x は二つあり，そのうち小さい方の解は $\boxed{\text{カキ}}$ であり，大きい方の解の整数部分は $\boxed{\text{ク}}$ である．

［2］　不等式

$$\log_2 27 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 3\log_5\{27(x-1)\} < 0 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす x の値の範囲を求めよう．

$d=\log_{10}2$ とおくと

$$\log_2 27 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\log_{10}3$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = -\frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\log_{10}(x-1)$$

$$\log_5\{27(x-1)\} = \frac{\boxed{\text{エ}}\log_{10}3 + \log_{10}(x-1)}{\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}}}$$

であるから，①を解くことは不等式

$$\boxed{\text{キ}}\log_{10}3 + \log_{10}(x-1) < 0$$

を解くことと同じである．これにより，求める x の値の範囲は

$$\boxed{\text{ク}} < x < \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$ とおく．uv の最大値を求めよう．

真数は正であるから $\boxed{\text{ア}}<x<\boxed{\text{イ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}<x\leqq\boxed{\text{ウ}}$ または $\boxed{\text{エ}}\leqq x<\boxed{\text{イ}}$ のとき，$uv\leqq 0$ であり，

$\boxed{\text{ウ}}<x<\boxed{\text{エ}}$ のとき，$u>0$，$v>0$ である．

よって，uv の最大値は $\boxed{\text{ウ}}<x<\boxed{\text{エ}}$ の範囲で考えればよい．

このとき，相加平均と相乗平均の関係により

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{2}\log_2(\boxed{\text{オ}}x^2+\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}})\quad\cdots\cdots(*)$$

である．

x の 2 次関数 $\boxed{\text{オ}}x^2+\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}}$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$

をとる．

$\boxed{\text{ウ}}<\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}<\boxed{\text{エ}}$ であり，$x=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のとき，$(*)$の不等式において等号

が成り立つ．したがって，uv は $x=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときに最大値

$$(\log_2\boxed{\text{ス}}-\boxed{\text{セ}})^{\boxed{\text{ソ}}}$$

をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

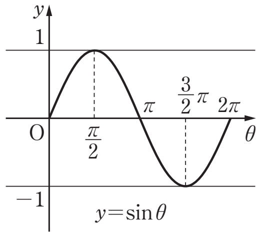
ⒸRECRUIT HOLDINGS

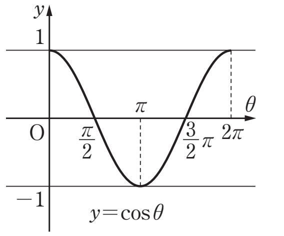
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　三角・指数・対数関数②

【CHECK & UP】

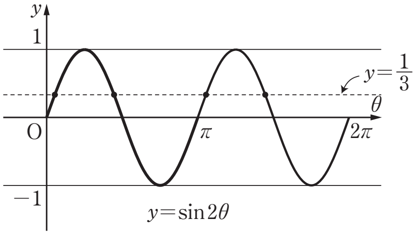
1 (1)





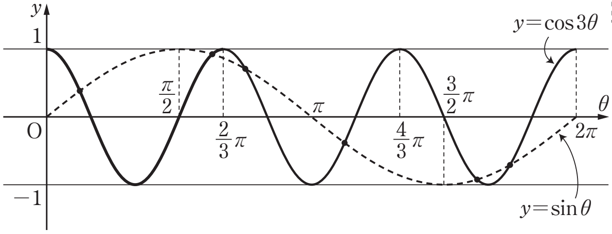
(2) (i) (1)のグラフより　**2 個**

(ii) $y=\sin 2\theta$ のグラフの周期は　$2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$



よって　**4 個**

(iii) $y=\cos 3\theta$ のグラフの周期は　$2\pi\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi$



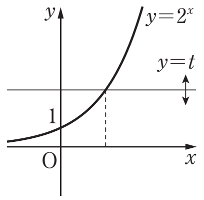
よって　**6 個**

三角関数のグラフは，センター試験のみならず数学ⅠAⅡBの範囲の中では出番は少ない．その中でも，「周期」と「方程式の解の個数」はその数少ない出番の代表である．
$\sin\theta$，$\cos\theta$ の周期（のうち正で最も小さいもの）は 2π である．この周期がおとずれる度に，グラフは同じ動きを繰り返す．変域の許す限りそれは続く．
そのグラフを半分進むのに π，さらにその半分進むのに $\frac{\pi}{2}$ 必要である．この「$\frac{1}{2}$ 周期」「$\frac{1}{4}$ 周期」の考え方は，周期が変化したりグラフが平行移動しても変わらない．例えば(3)の周期は $\frac{2}{3}\pi$，その $\frac{1}{4}$ 周期は $\frac{\pi}{6}$ である．それが３つ分で $\frac{3}{6}\pi$ すなわち $\frac{\pi}{2}$ であることがわかるだろうか．
これにより，解そのものではなく「解の個数」を要求されているとき，グラフを描くことでその個数がわかる．

2 (1)　右図実線部分

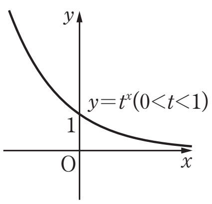
(2)　グラフより　$\boldsymbol{t=1}$

(3)　グラフより　$\boldsymbol{t>1}$



(4)　グラフより　$0<t<1$ のとき．

このときの $y=t^x$ のグラフは右図．



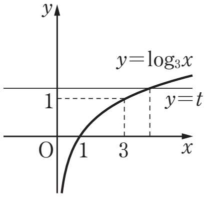
指数を含む方程式・不等式において「置き換え」を想定した問題である．
a^x　$(a>1)$ において
$x=0 \Leftrightarrow a^x=1$ を境にして
$x>0 \Leftrightarrow a^x>1$
$x<0 \Leftrightarrow 0<a^x<1$
である．
置き換えた文字に関する方程式の解が「1 より大きいか, 0 から 1 の間か」で，指数 x の正負が決まる．

3 (1)　右図実線部分．

(2) (i)　グラフより　$\boldsymbol{x=1}$

(ii)　グラフより　$\boldsymbol{0<x<1}$

(iii)　グラフより　$\boldsymbol{x\geqq 3}$

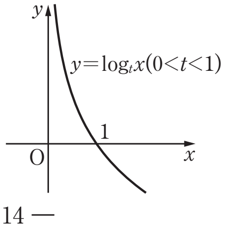


(3)　グラフより　$0<\log_3 2<1$　　つまり　$0<t<1$

このときの $y=\log_t x$ のグラフは右図．

(4)　$\log_3 27<\log_3 30<\log_3 81$ より

$3<t<4$　よって，t の整数部分は **3**



先ほどの対数バージョンである．真数が正であるため，真数 x の正負が問われることはない．よって，新たなる分岐点「真数が底と同じ値のとき」が発生し，その点において y 座標は 1 である．よって置き換えた文字に関する方程式の解が「0 より小さいか, 0 から 1 の間か, 1 より大きいか」で，真数 x がどこの範囲にあるかが決まる．さらに，真数が莫大に大きくなっても対数の値はさほど大きくならないことにも注目．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　$\sin\theta=\dfrac{3}{4}=0.75$

$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}=0.5$　　$\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1.41\cdots}{2}=0.70\cdots$

$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1.73\cdots}{2}=0.86\cdots$

よって　$\sin\dfrac{\pi}{4}<\sin\theta<\sin\dfrac{\pi}{3}$　　ゆえに　②

三角関数の「値の評価」である．有名角をとる値だけが出題されるわけではない．出題された三角関数の値と，有名角をとる値を比較し，どの値とどの値の間にあるかを判断する必要がある．この評価の際に有効な
$\sqrt{2}=1.41\cdots$
$\sqrt{3}=1.73\cdots$
$\sqrt{5}=2.23\cdots$
といった近似値は覚えておこう．

5　$2^n-2^m=12$　から　$2^n>12$　　よって　$n\geqq 4$

$a_k=2^k$ とすると　$\{a_k\}$：2，4，8，16，32，64，…

また，$\{a_k\}$ の階差数列を $\{b_k\}$ とすると

$\{b_k\}$：2，4，8，16，32，…

よって　$n\geqq 5$ のときは　$2^n-2^m=12$　を満たす自然数 m，n は存在しない．したがって　$n=4$ に限られる．

このとき　$2^4-2^m=12$ より　$2^m=4$　　$m=2$

ゆえに　$\boldsymbol{n=4}$，$\boldsymbol{m=2}$

指数・対数関数は「単調増加・単調減少」である．特に指数関数は爆発的に増加（減少）するため，指数を１つずつ増加させながら検証する問題が散見される．特にセンター試験においては，指数の桁数や解の個数などがわかるため予想もしやすい．センター試験であれば $n\leqq 4$ であることから $n=4$，$m=2$ が見つかった時点で終了である．

6　$0.5<2<3$ であり，$1.5>1$ より　$0.5^{1.5}<2^{1.5}<3^{1.5}$

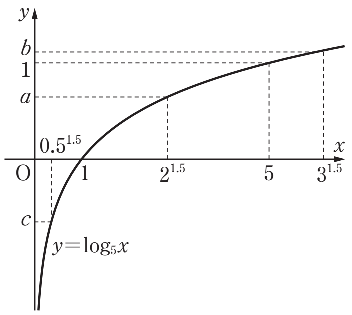
よって　$c<a<b$

$0.5^{1.5}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{8}}<1$　より　$c<0$

$2^{1.5}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}$　より　$0<a<1$

$3^{1.5}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}>5$　より　$1<b$

ゆえに　$\boldsymbol{c<a<1<b}$



指数・対数の大小関係に関する問題である．底の大きさ，指数の大きさ，真数の大きさなどに注目し，さらにグラフを用いながら考える．

※三角関数・指数関数・対数関数において，方程式・不等式および関数の最大・最小についての練習についてはどの問題集でも多く積むことができるが，解の個数や存在範囲，値の評価などは練習が不足しがちである．この講義を終えた後に色本などで数多くの「センター向けの問題」に多く触れることで，この分野が単独で出題されたときの「重さ」とその攻略法が身についていくことであろう．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1　$5\sin\theta-3\cos2\theta=3$ より　$5\sin\theta-3(1-2\sin^2\theta)=3$　　$\mathbf{6}\sin^2\theta+5\sin\theta-\mathbf{6}=0$

$(2\sin\theta+3)(3\sin\theta-2)=0$　　よって　$\sin\theta=\mathbf{\frac{2}{3}}$

$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$　　ゆえに　$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{3}$　$\cos\theta_2=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

ここで　$\cos\theta_1=\frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{3}=\frac{2.23\cdots}{3}=0.74\cdots$

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.41\cdots}{2}=0.70\cdots$　　$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{3.23\cdots}{4}=0.80\cdots$　であること
とより

$\cos\frac{\pi}{4}<\cos\theta_1<\cos\frac{\pi}{5}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\frac{\pi}{5}<\theta_1<\frac{\pi}{4}}$　……①

また，$n\theta_1>\theta_2$　より　$n\theta_1>\pi-\theta_1$　　$\theta_1>\frac{\pi}{n+1}$

これを満たす最小の自然数 n は①より　$n=\mathbf{4}$

2　[1]　$12(\log_2\sqrt{x})^2-7\log_4x-10>0$　……①

$\log_2\sqrt{x}=\log_2x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2x$　　$\log_4x=\frac{\log_2x}{\log_24}=\frac{\log_2x}{2}$　であることより

$3X^2-\frac{7}{2}X-10>0$　　$6X^2-\mathbf{7}X-\mathbf{20}>0$　　$(3X+4)(2X-5)>0$

よって　$X<-\mathbf{\frac{4}{3}}$，$\mathbf{\frac{5}{2}}<X$　より　$\log_2x<-\frac{4}{3}$，$\frac{5}{2}<\log_2x$

したがって　$x<2^{-\frac{4}{3}}$，$2^{\frac{5}{2}}<x$　　ゆえに，①を満たす最小の自然数 x は $x=\mathbf{6}$

$x+\log_3x<14$　……②

$x=11$ のとき　②の左辺 $=11+\log_311=13.\cdots$

$x=12$ のとき　②の左辺 $=12+\log_312=14.\cdots$

ゆえに，②を満たす最大の自然数 x は　$x=\mathbf{11}$

よって，求める自然数 x の範囲は　$6\leqq x\leqq11$

[2]　$a=\log_3x-\frac{7}{2}$　$b=\log_3x-\frac{5}{2}$

$c=\log_9x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}\log_3x-\frac{5}{2}$　$d=\log_9x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\log_3x-\frac{3}{2}$

(1)　$d=0$ より　$\log_9x=\frac{3}{2}$　　よって　$x=9^{\frac{3}{2}}=3^3=\mathbf{27}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) $abcd>0$ となる x について

$a>0$ となるのは　$\log_3 x>\dfrac{7}{2}$　より　$x>3^{\frac{7}{2}}=27\sqrt{3}$　のとき

$b>0$ となるのは　$\log_3 x>\dfrac{5}{2}$　より　$x>3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$　のとき

$c>0$ となるのは　$\log_9 x>\dfrac{5}{2}$　より　$x>9^{\frac{5}{2}}=(3^2)^{\frac{5}{2}}=3^5=243$　のとき

$d>0$ となるのは　$x>27$　のとき

よって，a，b，c，d がすべて負になるのは　$0<x<\mathbf{9\sqrt{3}}$　のとき

2つが正，2つが負となるのは　$\mathbf{27}<x<\mathbf{27\sqrt{3}}$　のとき

すべて正となるのは　$\mathbf{243}<x$　のときである．

(3) $27<x<27\sqrt{3}$ のとき　b と d が正，a と c が負である．

$$b-d=\frac{1}{2}\log_3 x-1=\frac{1}{2}(\log_3 x-2)=\frac{1}{2}(\log_3 x-\log_3 9)>0 \quad よって \quad b>d$$

$$a-c=\frac{1}{2}\log_3 x-1>0 \quad よって \quad a>c \quad ゆえに \quad \boldsymbol{c<a<d<b}$$

3　$x^2+\sqrt{2}=X$ とおくと　$X\geqq\sqrt{2}$　よって　$\log_2(x^2+\sqrt{2})=\log_2 X$　は，$x=\mathbf{0}$ のとき最小値　$\log_2\sqrt{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$　をとる．ゆえに　$\log_2 X\geqq\dfrac{1}{2}$

ここで　$\{\log_2(x^2+\sqrt{2})\}^2-2\log_2(x^2+\sqrt{2})+a=0$　……①　について

$\log_2(x^2+\sqrt{2})=\log_2 X=t$ とおくと　$t\geqq\dfrac{1}{2}$ である．このとき，①すなわち

$t^2-2t+a=0$　が　$t\geqq\dfrac{1}{2}$　に少なくとも1解をもつときの a の範囲を考える．

ここで　$a=-t^2+2t$ と変形することにより，

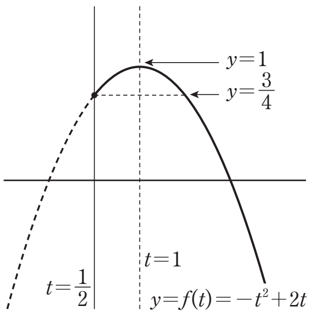
$y=f(t)=-t^2+2t$ と $y=a$ が $t\geqq\dfrac{1}{2}$ に少なくとも1つの共有点をもつときを考える．

$f(t)=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$　より，それは　$a\leqq\mathbf{1}$　である．

$a=1$ のとき方程式①は **2** 個の解をもつ．

①を満たす x が3個あるのは X が $\sqrt{2}$ と，$\sqrt{2}$ より大きい値のとき，すなわち t が $\dfrac{1}{2}$ と，$\dfrac{1}{2}$ より大きい値のときである．

それは，グラフより　$a=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$　のときである．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　三角・指数・対数関数②

[1]　$\tan\theta=t$ とおくと，①は $\tan 4\theta=\frac{1}{2}t$ 　また　$\tan 2\theta=\frac{\mathbf{2}\tan\theta}{\mathbf{1}-\tan^2\theta}=\frac{2t}{1-t^2}$

$$\tan 4\theta=\tan 2(2\theta)=\frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta}=\frac{2\cdot\frac{2t}{1-t^2}}{1-\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}=\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-(2t)^2}=\frac{-4t^3+4t}{t^4-6t^2+1}$$

$$=\frac{-\mathbf{4}\tan^3\theta+\mathbf{4}\tan\theta}{\tan^4\theta-\mathbf{6}\tan^2\theta+\mathbf{1}}$$

①より　$\frac{-4t^3+4t}{t^4-6t^2+1}=\frac{1}{2}t$ 　$t-\frac{-8t^3+8t}{t^4-6t^2+1}=0$ 　$\frac{t^5-6t^3+t+8t^3-8t}{t^4-6t^2+1}=0$

よって　$\frac{t(t^4+2t^2-7)}{t^4-6t^2+1}=0$ 　$\frac{\tan\theta(\tan^4\theta+\mathbf{2}\tan^2\theta-\mathbf{7})}{\tan^4\theta-6\tan^2\theta+1}=0$ 　つまり　$t(t^4+2t^2-7)=0$

$t>0$ よりこの式の両辺を t で割って　$(t^2)^2+2t^2-7=0$ 　$t^2=-1+2\sqrt{2}\ (>0)$

ゆえに　$t=\tan\theta=\sqrt{-\mathbf{1}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}}$ 　$2<\sqrt{8}<3$ 　より　$1<-1+2\sqrt{2}<2$

よって　$1<t<\sqrt{2}$

つまり　$1<\tan\theta<\sqrt{2}<\sqrt{3}$

すなわち　$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{<\theta\leqq}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$ 　である（ただし等号は成立しない）.

[2]　[1]　$2^x\cdot3^x-\frac{2^x}{27}-27\cdot3^x+1=0$ 　より

$$XY-\frac{1}{27}X-27Y+1=0 \qquad (X-\mathbf{27})\left(Y-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}\right)=0$$

$X=27,\ Y=\frac{1}{27}$ 　つまり　$2^x=27,\ 3^x=\frac{1}{27}$ 　より

$x=\log_2 27\ (>0)$ 　$x=-3\ (<0)$

よって小さい方の解は $\mathbf{-3}$．また，$\log_2 16<\log_2 27<\log_2 32$ 　より　$4<\log_2 27<5$

よって大きい方の解の整数部分は $\mathbf{4}$ である．

[2]　①の真数は正であるから　$x>1$．$d=\log_{10}2$ とおくと

$$\log_2 27=\frac{\log_{10}3^3}{\log_{10}2}=\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{d}}\log_{10}3 \qquad \log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\frac{\log_{10}(x-1)}{\log_{10}2^{-1}}=-\frac{1}{\boldsymbol{d}}\log_{10}(x-1)$$

$$\log_5\{27(x-1)\}=\frac{\log_{10}3^3+\log_{10}(x-1)}{\log_{10}\frac{10}{2}}=\frac{\mathbf{3}\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{\mathbf{1}-\boldsymbol{d}}$$

よって，①は　$\frac{3}{d}\log_{10}3+\frac{1}{d}\log_{10}(x-1)+3\cdot\frac{3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)}{1-d}<0$

$d=\log_{10}2$ より　$0<d<1$ 　つまり　$d>0$ であるから

$$3(1-d)\log_{10}3+(1-d)\log_{10}(x-1)+3d\{3\log_{10}3+\log_{10}(x-1)\}<0$$

$$3(2d+1)\log_{10}3+(2d+1)\log_{10}(x-1)<0$$

$$\mathbf{3}\log_{10}3+\log_{10}(x-1)<0$$

$\log_{10}27\cdot(x-1)<\log_{10}1$ 　$27(x-1)<1$ 　$x<\frac{28}{27}$ 　ゆえに　$\mathbf{1}<x<\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{27}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$u=\log_2(6-x)$，$v=\log_2(x-1)$　真数は正であるから　$\mathbf{1<x<6}$

u，v の正負について

$6-x>1$　つまり　$x<5$　のとき　$u>0$　　$x-1>1$　つまり　$x>2$　のとき　$v>0$

したがって，$2<x<5$　のとき　$uv>0$　　$1<x\leqq\mathbf{2}$，$\mathbf{5}\leqq x<6$　のとき　$uv\leqq 0$　である．

よって，uv の最大値は $2<x<5$ の範囲で考える．

このとき相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{1}{2}(u+v)\geqq\sqrt{uv}$　であり

$\dfrac{1}{2}(u+v)=\dfrac{1}{2}\{\log_2(6-x)+\log_2(x-1)\}=\dfrac{1}{2}\log_2(6-x)(x-1)=\dfrac{1}{2}\log_2(-x^2+7x-6)$

より

$$\sqrt{uv}\leqq\frac{1}{2}\log_2(-x^2+7x-6)\quad\cdots\cdots(*)$$

等号成立は　$u=v$　　すなわち　$\log_2(6-x)=\log_2(x-1)$　より

$6-x=x-1$　　$x=\dfrac{7}{2}$　のとき．

また　$-x^2+7x-6=-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$　は $2<x<5$ において　$x=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$ で最大値 $\dfrac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}}$ をとり，このとき$(*)$の右辺は最大となり，同時に$(*)$の等号が成り立つ．

したがって，$\sqrt{uv}$ は $x=\dfrac{7}{2}$ のとき最大値　$\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{25}{4}=\dfrac{1}{2}(2\log_2 5-2)=\log_2 5-1$ をとる．

このとき　uv は最大値　$(\log_2\mathbf{5}-\mathbf{1})^2$　をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。